数理解析研究所講究録
584巻 1986年 1-26

Dimension and superposition of continuous functions

大阪教育大　服部　泰直(Yasunao Hattori)

§1. Introduction.

コンパクト距離空間の位相的次元と、関数の superposition との関係を調べた Y. Sternfeld の論文[18]を紹介する。空間は距離空間とし、次元は被覆次元 dim を意味するものとする。また、空間 X 上の実連続関数全体を $C(X)$ により表わすものとする。Hilbert の第13問題を否定的に解決した A. Kolmogorov の次の定理はよく知られている。(Hilbert の問題そして、関数の superposition については [4] そして [13] を参照されたい。)

1.1 定理 (A. Kolmogorov [7]). $n \geq 2$ とする。このとき、$\varphi_{ij} \in C(I)$, $1 \leq i \leq 2n+1$, $1 \leq j \leq n$, が存在して、任意の $f \in C(I^n)$ に対して、

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_j) \right) \quad , \quad (x_1, \cdots, x_n) \in I^n,$$

ただし、$g_i \in C(R)$, $i=1,\cdots,2n+1$

と、できる。

この定理を、位相空間論の立場から注目し、P. A. Ostrand は、次のように、改良した。

<u>1.2 定理</u>（P. A. Ostrand [9]）. $m \geq 1$ とし、任意の $j \leq m$ に対して、X^j を $\dim X^j \leq d_j < \infty$ なるコンパクト空間とし、$n = \sum_{j=1}^{m} d_j$ とする。このとき、$\varphi_{i,j} \in C(X^j)$, $1 \leq i \leq 2n+1$, $1 \leq j \leq m$, が存在して、任意の $f \in C(\prod_{j=1}^{m} X^j)$ に対して、

$$f(x_1,\cdots,x_m) = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_{i,j}(x_j)\right), \quad (x_1,\cdots,x_m) \in \prod_{j=1}^{m} X^j,$$

ただし、$g_i \in C(R)$, $1 \leq i \leq 2n+1$, と表わすことが、できる。

特に、この定理において、$j=1$ とすると、次が、得られる。

<u>1.3 系</u>. コンパクト空間 X が、$\dim X \leq n$ ならば、$\varphi_i \in C(X)$, $1 \leq i \leq 2n+1$, が、存在して、任意の $f \in C(X)$ に対して、

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i(\varphi_i(x)), \quad x \in X,$$

ただし、$g_i \in C(R)$, $1 \leq i \leq 2n+1$, と表わすことが、でき

る。

系1.3は、コンパクト空間が、n次元以下であることの必要条件を述べている。一方、[14]において、Y. Sternfeldは、$n=2,3,4$の場合には、この逆も成立することを証明している。その時、鍵となったのは、次の定理である。

1.4. 定理 ([14, Theorem 4.9]). $n \leq m$とし、$W \subset \mathbb{R}^m$をn次元Cantor manifoldとする。このとき、$\dim P_i(W)=1$となるi $(1 \leq i \leq m)$が、存在するならば、$|a|=n-1$, $i \notin a$で、かつ$\dim P_{a \cup \{i\}}(W)=n$なる$a \subset \{1,\cdots,m\}$が、存在する。(ただし、$b \subset \{1,\cdots,m\}$に対して、$P_b$は、$\mathbb{R}^m$から$\prod_{i \in b} \mathbb{R}_i$へのprojectionとする。)

彼は、上の定理の一般化として、$\dim P_{\{1,\cdots,k\}}(W)=k$なる$k \leq m$が存在する時、$\{1,\cdots,k\} \cap a = \phi$, $|a|=n-k$そして、$\dim P_{a \cup \{1,\cdots,k\}}(W)=n$なる$a$が存在するか問うた([14, Problem 4.15])なぜならば、もし、この問題が、肯定的ならば、[14]における理論は、そのまま$n \geq 5$に対しても、適用できそうであったからである。(実際、N. V. Savinov [12]は、この問題が、肯定的に解決したとして、$n \geq 5$の場合に、それを適用した。)

しかし、Savinovの定理は、誤りである。実際、C. Pixley [10]は、反例を示し、それを否定的に解決した。（肯定的な部分解は、[16]において、得られている。）従って、[14]における理論は、単純には、一般の場合に、拡張することができない。そこで、Y. Sternfeldは、[18]において、[14]における手法を修正して、コンパクト空間の次元の特徴付けを得た。その概略を、説明しようと思う。§2は、本論の為の準備的なものである。そして、§3で、主定理と、それより導かれるコンパクト空間の次元の別の特徴付けが、述べられる。主定理の証明の概略は、節を改めて、§4において説明される。最後の節では、この分野における、未解決問題が、述べられる。

関数解析については、[2]と[11]を、そして、次元論については、[5]と[8]を参照されたい。

§2. Uniformly separating families and basic families of functions.

この節では、本論への準備として、関数のsuperpositionsと密接に、関係している2つの概念について、考える。

2.1 定義. X, Y_i, $1 \le i \le k$, を空間, $\varphi_i : X \to Y_i$, $1 \le i \le k$,

を、連続関数とし、$F=\{\varphi_i\}_{i=1}^{k}$ とおく。このとき、任意の $f\in C(X)$ に対して、

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k} g_i(\varphi_i(x)) \quad , \qquad x\in X$$

ただし、$g_i\in C(Y_i)$, $1\leq i\leq k$, と、できる時、F を X 上の <u>basic family</u> と呼ぶ。

集合 X に対して、

$$l_1(X)=\{\mu \mid \mu \text{ は } \sum_{x\in X}|\mu(x)|<\infty \text{ なる } X \text{ の実数値関数}\},$$

$$l_\infty(X)=\{\mu \mid \mu \text{ は } X \text{ 上の実数値有界関数}\}$$

とし、$l_1(X)$, $l_\infty(X)$ に、それぞれ、$\|\mu\|=\sum_{x\in X}|\mu(x)|$, $\|\mu\|=\sup_{x\in X}|\mu(x)|$ により、ノルムを定義する。このとき、よく知られたように、$l_1(X)$, $l_\infty(X)$ は、Banach spaces になる。

<u>2.2. 定義</u>　X, Y_i, $1\leq i\leq k$, を集合, $\varphi_i : X\to Y_i$, $1\leq i\leq k$ を関数とし、$F=\{\varphi_i\}_{i=1}^{k}$ とおく。このとき、任意の $f\in l_\infty(X)$ に対し、

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k} g_i(\varphi_i(x)) \quad , \qquad x\in X,$$

ただし、$g_i\in l_\infty(Y_i)$, $1\leq i\leq k$, と、できるとき、F を X 上の <u>uniformly separating family</u> と呼ぶ。

コンパクト空間 X と、k 個の実連続関数 $\varphi_i : X\to \mathbb{R}$, $1\leq i\leq k$,

に対して $F=\{\varphi_i\}_{i=1}^{k}$ が uniformly separating family ならば F の diagonal mapping $\varphi = \overset{k}{\underset{i=1}{\Delta}} \varphi_i : X \to \mathbb{R}^k$ は embedding になる。従って、この意味において、コンパクト空間上の uniformly separating family は特殊な embedding と考えてもよい。さて、次に uniformly separating family の同値条件を与えるが、それには準備が必要である。

X, Y_i, $1 \leq i \leq k$, を集合とし、$\mu \in l_1(X)$ とする。このとき、

$$\mu = \sum_{x \in X} a_x \delta_x, \text{ ただし } a_x = \mu(x), \quad \delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y = x \\ 0, & \text{if } y \neq x \end{cases}$$

と書ける。そして

更に、$\sum_{x \in X} |\mu(x)| < \infty$ であるので、μ が 0 でない値をとる $x \in X$ は高々可算である。従って、そのような点を $\{x_n \mid n = 1, \cdots\}$ とすると、$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n}$, $a_n = \mu(x_n)$ と書ける。さて、$i, (1 \leq i \leq k)$ に対して、$T_i : l_1(X) \to l_1(Y_i)$ を

$$T_i \mu = T_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{\varphi_i(x_n)}$$

により定義する。即ち

$$(T_i \mu)(y) = \sum_{x_n \in \varphi_i^{-1}(y)} a_n, \quad y \in Y_i$$

である。この意味より $T_i \mu$ を $\mu \circ \varphi_i^{-1}$ と書くこともある。今、$Y = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} Y_i$ (i.e. Y は Y_i, $1 \leq i \leq k$ の disjoint sum) とした時、$T : l_1(X) \to l_1(Y)$ を

$$T\mu = \sum_{i=1}^{k} T_i \mu = \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{\varphi_i(x_n)}$$

により定義する。このとき、T_i, $1 \leq i \leq k$, そして T は

bounded linear operatorsである。

<u>2.3. 命題</u>. 集合X, Y_i, $1 \le i \le k$, そして関数$\varphi_i : X \to Y_i$ ($1 \le i \le k$) に対して、次の条件(a)—(d)は同等である:

(a) $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{k}$ は uniformly separating family である。

(b) T の conjugate operator $T^* : (l_1(Y))^* \to (l_1(X))^*$ が onto である。ただし、$Y = \bigoplus_{i=1}^{k} Y_i$ とする。

(c) $T : l_1(X) \to l_1(Y)$ は isomorphism into である。

(d) λ ($0 < \lambda < 1$) が存在して、任意の $\mu \in l_1(X)$ に対し、$\|T_i \mu\| \geq \lambda \|\mu\|$ なる i ($1 \le i \le k$) が存在する。

証明. (a)⇒(b): まず、一般に、集合Xに対して、$(l_1(X))^*$と$l_\infty(X)$とは同一視してよいことに注意する。従って、以後、ことわりなく$l_\infty(X)$の要素と$(l_1(X))^*$の要素を同一視することがある。(b)を示すために、$f \in l_\infty(X)$をとる。今、Fがuniformly separating familyであるから、$g_i \in l_\infty(Y_i)$, $i \le k$ が存在して $f(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(\varphi_i(x))$, $x \in X$ とできる。そこで、$g \in l_\infty(Y)$を$g(y) = g_i(y)$, $y \in Y_i$ により定義すると、

$$(T^* g)(x) = (T^* g)(\delta_x) = g(T\delta_x) = g\left(\sum_{i=1}^{k} \delta_{\varphi_i(x)}\right) = \sum_{i=1}^{k} g_i(\varphi_i(x))$$
$$= f(x) 。$$

従って、$T^*: (l_1(Y))^* \to (l_1(X))^*$ は onto である。

(b) ⇒ (a)： $f \in l_\infty(X)$ とする。このとき、(b) より $T^*: l_\infty(Y) \to l_\infty(X)$ が onto であるから、$T^* g = f$ なる $g \in l_\infty(Y)$ が存在する。このとき、$g_i = g|_{Y_i}$，$1 \leq i \leq k$，とおくと、$g_i \in l_\infty(Y_i)$ であり、上と同様の議論より

$$f(x) = (T^* g)(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(\varphi_i(x)) \quad , \quad x \in X$$

となる。故に、$F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{k}$ は uniformly separated family である。

(b) ⇔ (c)： 一般に、Banach spaces X, Y 上の bounded linear operator $T: X \to Y$ に対し、T が isomorphism into であることと、conjugate operator $T^*: Y^* \to X^*$ が onto であることとは同等であるから、(b) と (c) が同等であることは明らかである。

(c) ⇒ (d)： $T: l_1(X) \to l_1(Y)$ が isomorphism into であるから、ある β $(0 < \beta \leq 1)$ が存在して、任意の $\mu \in l_1(X)$ に対して、$\|T\mu\| \geq \beta \cdot \|\mu\|$ とすることができる。ところで、$\|T\mu\| = \|\sum_{i=1}^{k} T_i \mu\| \leq \sum_{i=1}^{k} \|T_i \mu\|$ であるから、ある i $(1 \leq i \leq k)$ に対し、$\|T_i \mu\| \geq \beta/k \cdot \|\mu\|$ とできる。従って、このとき、$\lambda = \beta/k$ とおけば、この λ に対して、(d) が成立する。

(d) ⇒ (c)： Y は Y_i，$1 \leq i \leq k$，の disjoint sum であるから $\|T\mu\| = \sum_{i=1}^{k} \|T_i \mu\|$ である。従って、今、$\lambda > 0$ に対して、(d)

が、成立するとする時. 任意の $\mu \in l_1(X)$ に対して、

$$\|T\mu\| \geqq \|T_i\mu\| \geqq \lambda \cdot \|\mu\|。$$

従って、T は isomorphism into である。

basic family と uniformly separating family との間には次の関係がある。

<u>2.4. 命題</u>. コンパクト空間 X, Y_i, $1 \leqq i \leqq k$, と連続関数 $\varphi_i : X \to Y_i$, $(1 \leqq i \leqq k)$ に対し、$F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{k}$ が basic family ならば、F はまた uniformly separating family である。

証明. $Y = \bigoplus_{i=1}^{k} Y_i$ とし. そして. 任意の $g \in C(Y)$ に対し.
$g_i = g|_{Y_i}$, $(1 \leqq i \leqq k)$ とおく。今. operator $S : C(Y) \to C(X)$ を

$$(Sg)(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(\varphi_i(x)) \quad , \quad x \in X$$

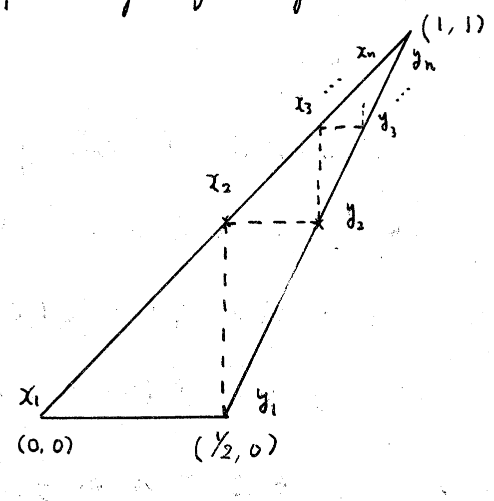
により定義する。このとき. S は bounded linear operator である。ところで、F が basic family であるから S は onto である. 従って. S の conjugate operator $S^* : (C(X))^* \to (C(Y))^*$ は isomorphism である。ところで、$l_1(X) \subset (C(X))^*$, $l_1(Y) \subset (C(Y))^*$, そして、$T = S^*|_{l_1(X)}$ とみなせるから. T は isomorphism である。従って. 命題 2.3 より. F は.

uniformly separating family である。

2.5. 問題 ([14, Problem 2.17], [18, p.17]). 命題 2.4 の逆は成立するか？（$k=2$ の時は肯定的である [14] を見よ）.

この節の最後に、uniformly separating family についての単純な例を与える。

2.6. 例. X を $(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(1,1)$ を頂点とする三角形（の周）とする。π_1, π_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ から第一座標，第二座標への projections とし，φ_1, φ_2 をそれぞれ π_1, π_2 の X 上への制限とする。このとき，$F=\{\varphi_1, \varphi_2\}$ は X 上の uniformly separating family ではない。実際，$\lambda>0$ とし，n を $\frac{1}{n}<\lambda$ なる自然数とする。このとき，左図のように $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in X$ をとる。そして，



$$\mu = \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n} - \delta_{y_1} - \cdots - \delta_{y_n} \in l_1(X)$$

とおくと，$\|\mu\| = 2n$, $\|\mu\circ\varphi_1^{-1}\| = 2$, $\|\mu\circ\varphi_2^{-1}\| = 0$ 。従って，命題 2.3 より $F=\{\varphi_1, \varphi_2\}$ は uniformly separating family ではない。

2.7. 例. $X = (\{\frac{1}{2}\}\times I)\cup(I\times\{\frac{1}{2}\})\subset\mathbb{R}^2$ とし、φ_1, φ_2 は例 2.6 と同様にする。このとき、$F=\{\varphi_1, \varphi_2\}$ は uniformly separating family である。実際 $\lambda = 1/3$ に対して命題 2.3 の (d) が成立する。

§3. Theorems.

この節では主定理とそれより導かれる別のコンパクト空間の次元の特徴付けを述べる。これらは次元論において興味深く思われる。主定理の証明は次の節で概説される。

3.1. 定理 (Main Theorem). $n \geq 1$ とするとき、コンパクト空間 X に対して次の条件 (a)－(c) は同等である。

(a) $\dim X \leq n$。

(b) basic family $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2n+1} \subset C(X)$ が存在する。

(c) uniformly separating family $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2n+1} \subset C(X)$ が存在する。

この定理はコンパクト空間 X の次元を $C(X)$ の構造により特徴付ける。$C(X)$ による次元の特徴付けは M. Katětov [6], M. J. Canfell [1], J. Hejcman [3] などにより得られてい

る。ここで、M. Katětov の定理を、想い起こしてみよう。X を、コンパクト空間とし、$A \subset C(X)$ とする。このとき、A が次の条件 (i)–(iii) を満たす時、A は、<u>analytical subalgebra</u> of C(X) と、呼ばれる。

(i) A は、C(X) の closed subalgebra である。

(ii) $1 \in A$。

(iii) $f \in C(X)$ に対し、もし $f^2 \in A$ ならば、$f \in A$ である。

更に、$F \subset C(X)$ に対して、F を含むすべての analytical subalgebra が、C(X) と一致するとき、F を、<u>analytical base</u> という。そこで、C(X) の <u>analytical dimension</u> <u>a-dim C(X)</u> は、

$$\text{a-dim}\, C(X) = \min\{|F| \mid F \text{ は、} C(X) \text{ の analytical base}\}$$

により、定義される。

<u>3.2. 定理</u>(M. Katětov [6])。空でないコンパクト空間 X においては、$\dim X = \text{a-dim}\, C(X)$ である。

定理 3.1 より導びかれる次の定理は、また、空間の次元を、C(X) の代数的構造により、特徴付けている。

<u>3.3. 定理</u>. $n \geq 1$ とする時、コンパクト空間 X が、$\dim X \leq n$

であることと、おのおのが、すべての定数値関数を含み、そして、唯一の要素により生成される $2n+1$ 個の closed subalgebras の代数的な和として、$C(X)$ が表わされることとは同等である。

証明. $\dim X \leq n$ とすると、定理3.1より、basic family $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2n+1} \subset C(X)$ が存在する。そこで、

$$C_i = \{\, g \circ \varphi_i \mid g \in C(\mathbb{R}) \,\}, \qquad 1 \leq i \leq 2n+1$$

とおくと、C_i は、すべての定数値関数を含む $C(X)$ の closed subalgebra である。更に、Stone-Weierstrass の定理と同様にすれば、C_i が唯一つの要素 φ_i により生成されることもわかる。そして、F が basic family であるから、任意の $f \in C(X)$ に対し、

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i(\varphi_i(x)) \quad , \quad x \in X ,$$

ただし、$g_i \in C(\mathbb{R})$, $i=1,\cdots,2n+1$, と表わすことができる。故に、$f = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i \circ \varphi_i \in C_1 + \cdots + C_{2n+1}$ となり、$C(X) = C_1 + \cdots + C_{2n+1}$ であることがわかる。逆に、$C(X) = C_1 + \cdots + C_{2n+1}$, ただし、各 C_i は一つの要素 φ_i により生成される $C(X)$ の closed subalgebra とする。このとき、明らかに、$F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2n+1}$ は basic family である。従って、定理3.3が証明された。

定理3.2そして3.3に関連して次がある。

<u>3.4.定理.</u> $n \ge 1$ とする時、コンパクト空間 X が $\dim X \le n$ であることと、以下の条件(i)−(iv)を満たす $C(X)$ の closed subalgebras A_i, $(1 \le i \le 2n+1)$, と B_j, $(1 \le j \le n)$ が存在することとは同等である。

(i) 各 A_i, B_j はそれぞれすべての定数値関数を含む。

(ii) 各 A_i は一つの要素により生成される。

(iii) 各 B_j は一つの要素により analytically に生成される。(i.e. B_j は $C(X)$ の analytic subalgebra であり、ある一つの B_j の要素が存在して、それを含む B_j の analytic subalgebra は B_j だけである。)

(iv) $0 \le k \le n$ なる任意の k, そして、k 個の任意の B_j と $2(n-k)+1$ 個の任意の A_i の代数的和は $C(X)$ である。

証明. $\dim X \le n$ とする。このとき、[17]より、一次元コンパクト空間 Y_j $(1 \le j < n)$ と連続関数 $\psi_j : X \to Y_j$ $(1 \le j \le n)$ そして、$2n+1$ 個の関数 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{2n+1} \subset C(X)$ が存在して、$0 \le k \le n$ なる任意の k に対し、k 個の任意の ψ_j と $2(n-k)+1$ 個の任意の φ_i が basic family を成すようできる。そこで、

$$A_i = \{ g \circ \varphi_i \mid g \in C(\mathbb{R}) \}, \qquad 1 \le i \le 2n+1,$$
$$B_j = \{ h \circ \psi_j \mid h \in C(Y_j) \}, \qquad 1 \le j \le n$$

とおく。このとき、明らかに、各 A_i は(ii)を満たし、各 A_i と各 B_j は(i)と(iv)を満たす。あとは、B_j は(iii)を満たすことを示せばよい。明らかに、B_j は analytic subalgebra である。さて、$\dim Y_j = 1$ であるから、定理3.2より、$C(Y_j)$ は一つ要素 $g_0 \in C(Y_j)$ により analytically に生成される。このとき、明らかに、B_j は $g_0 \circ \psi_j$ により analytically に生成される。逆に、(i)–(iv)を満たす $C(X)$ の closed subalgebras A_i, $(1 \le i \le 2n+1)$ と B_j $(1 \le j \le n)$ が存在したとする。このとき、(iv)において、$k=0$ の場合について考えると、定理3.3より $\dim X \le n$ であることがわかる。

§4. Proof of the Main Theorem

この節では、Main Theorem（定理3.1）の証明の概略を述べる。

(a) ⇒ (b)：系1.3より明らか。

(b) ⇒ (c)：命題2.4より明らか。

(c) ⇒ (a)：(c) ⇒ (a) を示す為には、次の㊡を示せば、十分である。

㊡ $\dim X = n$ $(n \ge 2)$ であり、$F \subset C(X)$ が uniformly separating family ならば $|F| \geq 2n+1$ である.

㊀を示すためには, いくつかの準備が必要である.

<u>4.1 定義</u> 一般に, コンパクト空間 X に対して,

$\alpha(X) = \min\{|F| \mid F$ は X の連続関数よりなる uniformly separating family$\}$

とおき, $n \geq 0$ に対し,

$$\alpha_n = \min\{\alpha(X) \mid \dim X = n\}$$

とおく。

系 1.3 と命題 2.4 より, $\alpha_n \leq 2n+1$ は, すぐ, わかる。

<u>4.2 補題</u> $n \geq 2$ に対し, $\alpha_{n+1} > \alpha_n \geq n+1$ である。

証明 <u>$\alpha_n \geq n+1$</u>: ある $n \geq 2$ に対し, $\alpha_n < n+1$ と仮定する。このとき, α_n の定義より, $\dim X = n$ なるコンパクト空間 X と, uniformly separating family $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\alpha_n} \subset C(X)$ が存在する。φ を F の diagonal mapping $\varphi = \mathop{\triangle}\limits_{i=1}^{\alpha_n} \varphi_i : X \to \mathbb{R}^{\alpha_n}$ とする。このとき, φ は embedding であるから, $\alpha_n = n$ でなければならない。従って, $\varphi(X)$ は $\mathbb{R}^n$ の n-次元部分集合であるから, 一般性を失なうことなく $[-1, 1]^n \subset \varphi(X)$ とできき

る。$\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$，ただし $\varepsilon_j\in\{-1,1\}$ $(1\leq j\leq n)$ を $[-1,1]^n$ の頂点とする。そして $[-1,1]^n$ の頂点 ε に対し、$s(\varepsilon)=\varepsilon_1\cdot\cdots\cdot\varepsilon_n$ とおく。又、$x_\varepsilon=\varphi^{-1}(\varepsilon)\in X$ とおく。このとき、$\mu=\sum_\varepsilon s(\varepsilon)\delta_{x_\varepsilon}$ とおくと、$\mu\in l_1(X)$ であり $\|\mu\|=2^n$ である。一方、任意 i，$(1\leq i\leq n)$ に対し、

$$\mu\circ\varphi_i^{-1}=\sum_\varepsilon s(\varepsilon)\cdot\delta_{\varphi_i(x_\varepsilon)}=\sum_\varepsilon s(\varepsilon)\,\delta_{\varepsilon_i}=0.$$

従って、命題2.3より F は uniformly separating family とはなりえない。これは矛盾である。従って $\alpha_n\geq n+1$ である。

<u>$\alpha_{n+1}>\alpha_n$</u> : $\alpha_{n+1}\leq\alpha_n$ と仮定する。このとき、$(n+1)$-次元コンパクト空間 X と、uniformly separating family $F=\{\varphi_i\}_{i=1}^{\alpha_{n+1}}\subset C(X)$ が存在する。このとき、Hurewicz の定理より、$\dim X\leq\dim\mathbb{R}+\dim\varphi_1$ であるから、$n+1\leq 1+\dim\varphi_1$。従って、$\dim\varphi_1\geq n$ である。そこで $\dim\varphi_1^{-1}(t)\geq n$ なる $t\in\mathbb{R}$ をとる。そして、$F'=\{\varphi_i|_{\varphi_1^{-1}(t)}\}_{i=2}^{\alpha_{n+1}}\subset C(\varphi_1^{-1}(t))$ とおくと、F' は、$\varphi_1^{-1}(t)$ 上の uniformly separating family である。さて もし、$\dim\varphi_1^{-1}(t)=n+1$ ならば、$|F'|\leq\alpha_{n+1}-1<\alpha_{n+1}$ であるから α_{n+1} の定義に矛盾。一方、もし、$\dim\varphi_1^{-1}(t)=n$ ならば、$|F'|\leq\alpha_{n+1}-1<\alpha_{n+1}\leq\alpha_n$ となり、このときは α_n の定義に矛盾。従って、$\alpha_{n+1}>\alpha_n$ である。

4.3.定義　$n \geq 1$ とし、$\beta = \{\beta_i\}_{i=1}^{n}$ を自然数からなる真に単調増加な列とする。そして、Kを自然数からなる有限集合とする。このとき、tree T of order n and type β of subsets of K は、n についての帰納法により定義される。即ち、

$|T^*| \geq \beta_1$ で $T = \{\{i\} \mid i \in T^*\}$ となる $T^* \subset K$ が存在するとき、T を tree of order 1 and type $\beta = \{\beta_1\}$ of subsets of K と呼ぶ。さて、tree of order r and type β of subsets of K が $1 \leq r < n$ に対して定義されたとする。このとき、$|T^*| \geq \beta_n$ なる $T^* \subset K$ が存在して任意の $i \in T^*$ に対し、$T = \{\{i\} \cup a \mid a \in T_i,\ i \in T^*\}$ となる tree T_i of order $n-1$ and type $\{\beta_1, \cdots, \beta_{n-1}\}$ of subsets of $T^* - \{i\}$ が存在するとき、T を tree of order n and type $\beta = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ of subsets of K と呼ぶ。

4.4.例.　$K = \{1, 2, 3, 4\}$，$\beta = \{2, 4\}$ とし、$T = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 1\}, \{4, 2\}\}$ とすると、T は tree of order 2 and type $\beta = \{2, 4\}$ of subsets of K である。実際、$T^* = \{1, 2, 3, 4\} = K$ とし、$T_1 = \{\{2\}, \{3\}\}$, $T_2 = \{\{3\}, \{4\}\}$，$T_3 = T_4 = \{\{1\}, \{2\}\}$ とすればよい。

空間 X から空間 Y への写像 f（必ずしも onto であるとは限らない）に対して、X の任意の空でない開集合 U が、$\mathrm{int}_Y f(U) \neq \phi$ である時、f を <u>interior mapping</u> という。

<u>4.5. 補題</u>　X を n-次元コンパクト空間 $(n \geq 2)$ とし、$\{\varphi_i\}_{i=1}^{k} \subset C(X)$ を、X 上の uniformly separating family とする。このとき、すべての $a \in T$ に対し、$\varphi_a = \underset{i \in a}{\triangle} \varphi_i : X' \to \mathbb{R}^n$ が interior mapping になるような X の n-次元コンパクト部分集合 X' と、tree T of order n and type $\{2, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$ of subsets of $\{1, 2, \cdots, k\}$ が存在する。ただし、$\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ は定義 4.1 のそれである。

<u>4.6. 定義</u>　T^* を、有限集合である添字の集合とし、X, Y_i, $i \in T^*$, を集合、そして、$F = \{\varphi_i\}_{i \in T^*}$, $\varphi_i : X \to Y_i$, とする。更に、n を自然数、$c > 0$ を定数とする。このとき、$\mu \in l_1(X)$ は以下の条件を満たすとき、<u>array of order n and constant c w.r.t. F</u> と呼ばれる。

(ar. 1)　$\mu = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon(j) \delta_{x_j}$, ただし、$\varepsilon(j) = \{-1, 1\}$, $\{x_j\}_{j=1}^{m} \subset X$ と表わされる。

(ar. 2)　$\|\mu\| = m$

(ar. 3)　任意の $i \in T^*$ に対し、次の (ar 3.1), (ar. 3.2) を満

たす $L_i \subset \{1, \cdots, m\}$ が存在する．

(ar. 3.1) $\mu_i = \sum_{j \in L_i} \varepsilon(j)\,\delta_{x_j}$ とおくと，$\mu_i \circ \varphi_i^{-1} = 0$

(ar. 3.2) $j \leq m$ に対し，

$$\sigma(j) = \{ i \mid i \in T^*,\ j \in L_i \}$$

とおくとき，$|\sigma(j)| \leq 2n$ であり，

$$|\{ j \mid j \leq m,\ |\sigma(j)| = 2n \}| \geqq \|\mu\| - c\|\mu\|^{n-1/n}$$

である．

4.7 補題．μ を array of order n and constant c w.r.t. $F = \{\varphi_i\}_{i \in T^*}$ とする。このとき、もし $|T^*| = 2n$ ならば，任意の $i \in T^*$ に対し，$\|\mu \circ \varphi_i^{-1}\| / \|\mu\| \leq c \cdot \|\mu\|^{-\frac{1}{n}}$ である。

4.8 補題．X をコンパクト空間，T を tree of order n ($n \geq 2$) and type $\{2, 4, 6, \cdots, 2n\}$ とし，$F = \{\varphi_i\}_{i \in T^*} \subset C(X)$ を任意の $a \in T$ に対し，$\varphi_a = \underset{i \in a}{\triangle} \varphi_i : X \to R^{|a|}$ が interior mapping であるような family とする。このとき，定数 $c = c(n, |T^*|)$ (n と $|T^*|$ にのみよってきまる) が存在してすべての整数 $L \geq 1$ に対し，X 上の array μ of order n and constant c w.r.t. F で $\|\mu\| = L$ なるものが存在する。

補題 4.5，4.7 そして 4.8 の証明はここでは省略する。

補題 4.7 は、単純な計算により、証明することができる。補題 4.8 の証明は、大変、長くそして煩雑である。

㊟の証明の準備が、整ったので、これから㊟を証明しよう。n についての帰納法により $\alpha_n = 2n+1$ $(n \geq 2)$ を、証明する。まず、$\alpha_n \leq 2n+1$ であったことに、注意しておく。従って、$\alpha_n \geq 2n+1$ であることを示せばよい。まず、$n=2$ の場合について、考える。初めに、$\alpha_2 \geq 4$ を示す。そのためには、$\alpha_2 < 4$ と仮定すると、補題 4.2 より $\alpha_2 = 3$。従って、2-次元コンパクト空間 X と、uniformly separating family $F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{3} \subset C(X)$ が、存在する。それ故、補題 4.5 より、2-次元コンパクト部分集合 $X' \subset X$ と、任意の $a \in T'$ に対し、$\varphi_a = \underset{i \in a}{\Delta} \varphi_i : X' \to \mathbb{R}^2$ が、interior mapping であるような tree T' of order 2 and type $\{2, 3\}$ が、存在する。このとき、$|a| = 2$ なる $a \subset \{1, 2, 3\}$ に対しては、$\varphi_a : X' \to \mathbb{R}^2$ は、interior mapping である。さて、$\varphi_4 = \varphi_3$ とし、$F' = \{\varphi_i\}_{i=1}^{4}$，$T = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{4,1\}, \{4,2\}\}$ とおくと、T は tree of order 2 and type $\{2, 4\}$ である（例 4.4 を見よ.）そして、T' と F' は、$n=2$ とした時の補題 4.8 の仮定を満たしている。従って、補題 4.8 より、ある定数 $c > 0$ が、存在して、任意の自然数 k に対して、$\|\mu\| = k$ であるような array μ of order 2 and constant c w.r.t. F が、存在する。このとき、補題 4.7 より

任意の $i \in T^*$ に対して、$\|\mu\circ\varphi_i^{-1}\| / \|\mu\| \leq C\|\mu\|^{-\frac{1}{2}}$ であるから、$\|\mu\circ\varphi_i^{-1}\| \leq C\cdot k^{-\frac{1}{2}}$ である。これが任意の k に対して成立するのだから、命題2.3より、F は uniformly separating family とはなりえない。これは矛盾である。従って、$\alpha_2 \geq 4$ である。そしてまた、これと同様の議論により、$\alpha_2 \geq 5$ も示せる。従って、$\alpha_2 = 5$ である。さて、次に、$\alpha_r = 2r+1$ が $1 \leq r < n$ に対して証明されたとする。このとき、系1.3と補題4.2より、$2n+1 \geq \alpha_n > \alpha_{n-1} = 2n-1$ であるので、$\alpha_n = 2n+1$ 或いは $\alpha_n = 2n$ である。今、$\alpha_n = 2n$ と仮定すると、α_2 の時と同様の議論により矛盾が生ずる。従って、$\alpha_2 = 2n+1$ である。それ故、㊍が示され、従って、定理3.1が証明された。

§5. Related topics and problems.

次は、§2において述べられているが、ここでもう一度繰り返すことにする。

<u>5.1 問題</u>（[14, Problem 2.17]，[18, p. 17]）．コンパクト空間 X，Y_i $(1 \leq i \leq k)$ と連続関数 $\varphi_i : X \to Y_i$ $(1 \leq i \leq k)$ について、$F = \{\varphi_i\}_{i=1}^{k}$ が uniformly separating family ならば、

Fは basic family になるか？

定理3.1に関して、次の問題が考えられる。

<u>5.2.問題</u>　定理3.1のより簡単な証明を与えよ。

<u>5.3 問題</u>　定理3.1を、無限次元空間に、拡張せよ。

[18]において、与えられている定理3.1の証明は、大変長く、煩雑であるので、問題3.1は、考えてみる価値があるように、思われる。

[18]とは、直接には、関係がないが、その周辺について、次に、述べてみたい。よく知られているように、R^nの部分集合Wが、またn-次元ならば、Wはn-cube I^nを含む。Y. Sternfeldは、[15]において、これを、一般の可分距離空間に、拡張した。

<u>5.4 定義</u>．Xを可分距離空間とし、$\mathfrak{A}$を、Xと同じ次元を持つ閉集合からなる族とする。このとき、$\dim F = \dim X$なる任意の閉集合Fに対して、$H \subset F$なる$\mathfrak{A}$の要素Hが、存在する時、$\mathfrak{A}$を、<u>dimensional network</u>と呼ぶ。そして、$\dim X = n$

であり、かつ、高々可算な dimensional network を持つ時、X を <u>countably n-dimensional</u> という。

<u>5.5. 定理</u>([15, Theorem 1]). X と Y は、可分距離空間であり、X は、countably $(\dim X)$-dimensional であるとする。このとき、$\dim W = \dim X + \dim Y$ なるコンパクト集合 $W \subset X \times Y$ に対して、$\dim X' = \dim X$, $\dim Y' = \dim Y$ なるコンパクト集合 $X' \subset X$ と $Y' \subset Y$ で、$X' \times Y' \subset W$ なるものが、存在する。

この定理に、関して、次の問題が、ある。

<u>5.6 問題</u>([15, Problem 1]). 定理 5.5 において、X の countable dimensionality の条件は、おとせるか？特に、$\dim X = \dim Y = 1$ の時にどうか？($\dim X = 0$ or $\dim Y = 0$ の時は肯定的である。)

<u>5.7. 問題</u>([15, Problem 2]). 定理 5.5 及び、問題 5.6 において、$\dim(X' \times Y') = \dim W$ となるか？

<u>5.8. 問題</u>([15, Problem 3]). 定理 5.5 及び、問題 5.6 に

おいて、 $\dim W = \dim X + \dim Y$ の条件を、 $\dim W = \dim(X \times Y)$ に、おきかえたら、どうか？

References

[1] M. J. Canfell, Uniqueness of generators of principal ideals in rings of continuous functions, Proc Amer. Math. Soc. 26 (1970), 571-573.

[2] N. Dunford and J. Schwarts, Linear Operators, Part I, Interscience, New York, 1957.

[3] J. Hejcman, Dimension and partition of unity, Seminar Uniform Spaces, 1973-1974, directed by Z. Frolik, MO ČSAV, Praha, 195-200.

[4] ヒルベルト, 数学の問題（一松 信 訳・解説）, 共立出版, 1969.

[5] W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.

[6] M. Katětov, On rings of continuous functions and dimension of compact spaces, Časopis Pěst Mat. Fys. 75 (1950), 1-16.

[7] A. N. Kolmogorov, On the representation of continuous functions of many variables, Dokl. Acad. Nauk. SSSR 114 (1957), 953-956 (= Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 28 (1968), 55-61).

[8] J. Nagata, Modern Dimension Theory, revised and extended edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1983.

[9] P. A. Ostrand, Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13, Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 619-622.

[10] C. Pixley, A note on the dimensions of projections of cells in E^n, Israel J. Math. 32 (1979), 117-123.

[11] A. P. Robertson and W. Robertson, Topological Vector Spaces, second edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[12] N. V. Savinov, On the dimension of projections of compacta lying in R^n and uniformly separating families of functions, Soviet Math. Dokl. 28 (1983), 126-127.

[13] D. A. Sprecher, A survey of solved and unsolved problems on superpositions of functions, J. Approximation Theory 6 (1972), 123-134.

[14] Y. Sternfeld, Uniformly separating families of functions, Israel J. Math. 29 (1978), 61-91.

[15] __________, Dimension of subsets of product spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 452-454.

[16] __________, On the dimension of projections of compact subsets of R^m, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 735-742.

[17] __________, Linear superpositions with mappings which lower dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 529-543.

[18] __________, Dimension, superposition of functions and separation of points, in compact metric spaces, Israel J. Math. 50 (1985), 13-53.